

Предмет, задачи, критерии и принципы эконометрики

Эконометрика - быстроразвивающаяся отрасль науки, цель которой состоит в том, чтобы придать количественные меры экономическим отношениям. Эконометрика - совокупность методов анализа связей между различными экономическими показателями (факторами) на основании реальных статистических данных с использованием аппарата теории вероятностей и математической статистики. Джеймс Лайтхилл, английский математик и экономист, коротко так раскрывает этот термин: «Эконометрика -- это статистико-математический анализ экономических отношений». Такой анализ производится с целью выработки рекомендаций по повседневным проблемам делового мира. Естественно, что при этом целесообразно придерживаться выводов и решений, которые обоснованы количественно. Именно этим и занимается наука эконометрика.

Развитость любого научного направления в современном мире принято оценивать числом нобелевских лауреатов. И если первоначально Нобелевские премии присуждались, прежде всего, в области естественных наук, то впоследствии эти границы существенно расширились. В частности, в 1968 г., в год 300-летия существования Шведского банка, им была учреждена Нобелевская премия и в области экономических наук (читай -- в области эконометрики). Первыми лауреатами Нобелевской премии в 1969 г. стали два экономиста-математика -- голландец Ян Тинберген и норвежец Рангар Фриш, заслугой которых признана разработка математических методов анализа экономических процессов.

С тех пор подобного мирового признания удостоены многие ученые, в число которых вошли представители ряда стран, включая Россию: - в 1970 г. -- Пол Антони Самуэльсон -- за учебник “Экономикс” с официальной формулировкой “за вклад... в повышение общего уровня анализа в экономической науке”; - в 1973 г. -- Василий Васильевич Леонтьев, американский экономист российского происхождения, -- за разработку метода прогнозного экономического анализа “затраты -- выпуск”; в 1975 г. -- Леонид Витальевич Канторович, советский экономист и математик, -- за введение в экономическую науку моделей линейного программирования и разработку подходов к оптимизации использования ресурсов.

Объект исследования эконометрики

Объектом изучения эконометрики, как самостоятельного раздела математической экономики, являются экономико-математические модели, которые строятся с учетом случайных факторов. Такие модели называются эконометрическими моделями. Исследование эконометрических моделей проводится на основе статистических данных об изучаемом объекте и с помощью методов математической статистики.

Эконометрические модели и методы сейчас - это не только мощный инструмент для получения новых знаний в экономике, но и широко применяемый аппарат для принятия практических решений в прогнозировании, банковском деле, бизнесе. Развитие информационных технологий и специальных прикладных программ, совершенствование методов анализа сделали эконометрику мощнейшим инструментом экономических исследований.

Необходимо отметить, что любая из моделей будет лишь упрощением реальности и всегда содержит определенную погрешность. Поэтому из всех предлагаемых моделей с помощью статистических методов отбирается та, которая в наибольшей степени соответствует реальным эмпирическим данным и характеру зависимости. Если модель удовлетворяет требованиям качества, то она может быть использована для прогнозирования, либо для анализа внутреннего механизма исследуемых процессов. Математические модели позволяют более полно исследовать и понимать сущность происходящих процессов, анализировать их.

В эконометрических исследованиях используют разные типы моделей. Но можно выделить три основных класса моделей, которые применяются в эконометрике: модели временных рядов регрессионные модели (с одним уравнением) системы одновременных уравнений.

Эконометрика входит в комплекс дисциплин «Экономико-математические методы». Ее предметом является количественное выражение взаимосвязей и зависимостей экономических явлений и процессов, закономерностей экономики.

Основные принципы эконометрики Чтобы продемонстрировать основные принципы эконометрики, рассмотрим пример из страхового бизнеса (страхование автомобилей). Здесь основная проблема возникает вследствие сложного характера зависимости размера страховой премии от множества переменных факторов, ряд из которых невозможно учесть. Так, очевидно, что годовой пробег автомобиля - это важный фактор, но пользоваться им как оценочным затруднительно. Практическое решение состоит в определении ряда легко наблюдаемых факторов - мощности машины, возраста (владельца страхового полиса и машины), географического положения, износа, каждый из которых имеет некоторую связь с истинным риском, в свою очередь определяющим фактический размер страховой премии. эконометрика статистика моделирование

Предположим, например, что используются пять таких факторов и каждый из них измеряется на пяти уровнях. Это приводит к $5^5 = 3125$ отдельным классификационным требованиям. Если застраховано 100 000 машин, то в каждом классе будет в среднем по 32 машины. Поскольку вероятность страхового требования порядка 10% в год, данные в

каждом разряде подвергались бы слишком большим колебаниям вследствие случайных ошибок выборки и было бы трудно оценить истинную связь между тем, что происходит в разных разрядах. Более того, заниматься таким большим числом отдельных групп было бы сложно и дорого. Для преодоления этих сложностей разрабатывают классификационную систему, основанную на выяснении относительной важности каждого фактора. Тогда классификационную формулу можно построить на аддитивной или мультипликативной основе, когда каждый фактор оценивается баллами, а формула в целом дает относительный уровень риска.

Таким же образом строятся многие экономические модели, когда наблюдаемые значения величины Y зависят линейным или более сложным образом от значений многих других наблюдаемых величин, т. е.:

$$Y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + e.$$

В этом уравнении e - остаток, устраняющий разность между Y наблюдавшимся и полученным по набору x_i расчетным образом.

Основная задача эконометрического анализа заключается в отыскании значений коэффициентов a , обеспечивающих наименьшую величину e , а следовательно, наилучшую точность прогноза. Из приведенного примера видно, что эконометрические методы строятся на синтезе трех областей знаний: экономики, математики и статистики. Основой является экономическая модель, под которой понимается схематическое представление экономического явления или процесса с помощью научной абстракции, отражения только характерных черт. Наибольшее распространение в современной экономике получил метод анализа экономики “затраты - выпуск”. Это матричные (балансовые) модели, строящиеся по шахматной схеме и позволяющие в наиболее компактной форме представить взаимосвязь затрат и результатов производства. Таким образом, объектом эксперимента стали не только многократно воспроизводимые явления и процессы, но и системы и изменения в них, реально в практике трудно либо вообще неосуществимые.

Описание экономических систем математическими методами, или эконометрика, дает заключение о реальных объектах и связях по результатам выборочного обследования или моделирования. Вместе с тем, чтобы сделать вывод о том, какие из полученных результатов являются достоверными, а какие сомнительными или просто необоснованными, необходимо уметь оценивать их надежность и величину погрешности. Все перечисленные аспекты и составляют содержание эконометрики как науки. В эконометрике, как и в любой научной дисциплине, познание развивается в соответствии с общим научным методом, предполагающим: - формулировку гипотезы с учетом

соотношений между наблюдаемыми данными; - сбор статистических данных и представление гипотезы в сжатой или математической форме; - модификацию или улучшение гипотезы. Таким образом, сердцевиной познания в экономике является эксперимент, предполагающий либо непосредственное наблюдение (измерение), либо математическое моделирование. Область применения эконометрических моделей и методов достаточно обширна. Это все сферы экономической теории и практики, где есть возможность сбора и обработки статистических данных, проведения наблюдений и экспериментов с целью учета воздействия случайных факторов, выявления качественных и количественных взаимосвязей между экономическими величинами и прогнозирования их поведения.

Цели и задачи эконометрики

Методологическая особенность эконометрики заключается в применении достаточно общих гипотез о статистических свойствах экономических параметров и ошибок при их измерении. Полученные при этом результаты могут оказаться нетождественными тому содержанию, которое вкладывается в реальный объект. Поэтому важная задача эконометрики - создание как более универсальных, так и специальных методов для обнаружения наиболее устойчивых характеристик в поведении реальных экономических показателей. Эконометрика разрабатывает методы подгонки формальной модели с целью наилучшего имитирования ею поведения моделируемого объекта на основе гипотезы о том, что отклонения модельных значений параметров от их реально наблюдаемых случайны и вероятностные характеристики их известны. Есть достаточно много аргументов, в силу которых качественной информации о параметрах модели недостаточно и ее необходимо заменить количественной информацией, добываемой с помощью статистических данных. Эконометрика как раз и занимается методами получения лучших оценок параметров эконометрических моделей, конструируемых в прикладных целях

На стыке экономической практики и математической статистики в начале 30-х годов зародилась новая самостоятельная дисциплина, получившая название "Эконометрика". Эконометрика - это наука, которая изучает статистические закономерности в экономике. Объектом изучения эконометрики, как самостоятельного раздела математической экономики, являются экономико-математические модели, которые строятся с учетом случайных факторов. Такие модели называются эконометрическими моделями. Исследование эконометрических моделей проводится на основе статистических данных об изучаемом объекте и с помощью методов математической статистики. Основными задачами эконометрики являются: получение

наилучших оценок параметров экономико-математических моделей, конструируемых в прикладных целях; проверка теоретико-экономических положений и выводов на фактическом (эмпирическом) материале; создание универсальных и специальных методов для обнаружения статистических закономерностей в экономике.

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Реклама

- – Понятия экономических рядов динамики
- – Предварительный анализ и сглаживание временных рядов экономических показателей

- – Расчет показателей динамики развития экономических процессов
- – Анализ сезонных колебаний в экономике

Понятия экономических рядов динамики

Динамические процессы, происходящие в экономических системах, чаще всего проявляются в виде ряда последовательно расположенных в хронологическом порядке значений того или иного показателя, который в своих изменениях отражает ход развития изучаемого явления в экономике. Эти значения, в частности, могут служить для обоснования (или отрицания) различных моделей социально-экономических систем, в том числе изученных в предыдущих главах. Они служат также основой для разработки прикладных моделей особого вида, называемых трендовыми моделями, которые будут рассмотрены в главе 5.

Прежде всего, дадим ряд определений. Последовательность наблюдений одного показателя (признака), упорядоченных в зависимости от последовательно возрастающих или убывающих значений другого показателя (признака), называют **динамическим рядом**, или **рядом динамики**. Если в качестве признака, в зависимости от которого происходит упорядочение, берется время, то такой динамический ряд называется **временным рядом**. Так как в экономических процессах, как правило, упорядочение происходит в соответствии со временем, то при изучении последовательных наблюдений экономических показателей все три приведенных выше термина используются как равнозначные. Составными элементами рядов динамики являются, таким образом, цифровые значения показателя, называемые **уровнями** этих рядов, и моменты или интервалы времени, к которым относятся уровни.

Подробнее

Реклама

Временные ряды, образованные показателями, характеризующими экономическое явление на определенные моменты времени, называются **моментными**; пример такого ряда представлен в табл..1.

Таблица .1

Списочная численность предприятия

Дата	/I	/II	/III	/IV	0/IV
Списочная численность рабочих	100	400	200	600	800

Если уровни временного ряда образуются путем агрегирования за определенный промежуток (интервал) времени, то такие ряды называются **интервальными** временными рядами; пример приведен в табл. .2.

Таблица .2

Фонд заработной платы рабочих предприятия

Месяц	Я нварь	Ф евраль	М арт	А прель
Фонд заработной платы рабочих, тыс. руб.	3 7 187,5	3 8 270,0	3 9 380,0	4 2 535,0

Временные ряды могут быть образованы как из абсолютных значений экономических показателей, так и из средних или относительных величин — это производные ряды; пример такого ряда дан в табл. .3.

Таблица .3

Среднемесячная заработная плата рабочих предприятия

Месяц	Я нварь	Ф евраль	М арт	А прель
-------	------------	-------------	----------	------------

Средняя заработная плата рабочих, тыс. руб.	8 750	8 900	950	9 050
--	----------	----------	-----	----------

Под **длиной** временного ряда понимают время, прошедшее от начального момента наблюдения до конечного. Таким образом, длина всех приведенных выше временных рядов равна четырем месяцам. Часто длиной ряда называют количество уровней, входящих во временной ряд; длина ряда из табл. 1 равна пяти, а из табл. 2 и 3 – четырем.

Если во временном ряду проявляется длительная ("вековая") тенденция изменения экономического показателя, то говорят, что имеет место тренд. Таким образом, под **трендом** понимается изменение, определяющее общее направление развития, основную тенденцию временных рядов. В связи с этим экономико-математическая динамическая модель, в которой развитие моделируемой экономической системы отражается через тренд ее основных показателей, называется **трендовой моделью**. Для выявления тренда во временных рядах, а также для построения и анализа трендовых моделей используется аппарат, разработанный для простых статистических совокупностей. Отличие временных экономических рядов от простых статистических совокупностей заключается, прежде всего, в том, что последовательные значения уровней временного ряда зависят друг от друга. Поэтому применение выводов и формул теории вероятностей и математической статистики требует известной осторожности при анализе временных рядов, особенно при экономической интерпретации результатов анализа.

Предположим, имеется временной ряд, состоящий из n уровней: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

В самом общем случае временной ряд экономических показателей можно разложить на четыре структурно образующих элемента:

- тренд, составляющие которого будем обозначать $U_t, t = 1, 2, n$;
- сезонная компонента, обозначаемая через $V_t, t = 1, 2, \dots, n$;
- циклическая компонента, обозначаемая через $C_t, t = 1, 2, \dots, n$,
- случайная компонента, которую будем обозначать $\varepsilon_t, t = 1, 2, \dots, n$.

Под трендом, как уже отмечалось выше, понимается устойчивое систематическое изменение процесса в течение продолжительного времени.

Во временных рядах экономических процессов могут иметь место более или менее регулярные колебания. Если они носят строго периодический или близкий к нему характер и завершаются в течение одного года, то их называют **сезонными колебаниями**. В тех случаях, когда период колебаний составляет несколько лет, то говорят, что во временном ряду присутствует **циклическая компонента**.

Тренд, сезонная и циклическая компоненты называются *регулярными*, или систематическими, компонентами временного ряда. Составная часть временного ряда, остающаяся после выделения из него регулярных компонент, представляет собой *случайную*, нерегулярную компоненту. Она является обязательной составной частью любого временного ряда в экономике, так как случайные отклонения неизбежно сопутствуют любому экономическому явлению. Если систематические компоненты временного ряда определены правильно, что как раз и составляет одну из главных целей при разработке трендовых моделей, то остающаяся после выделения из временного ряда этих компонент так называемая *остаточная последовательность* (ряд остатков) будет случайной компонентой ряда, т.е. будет обладать следующими свойствами:

- случайностью колебаний уровней остаточной последовательности;
- соответствием распределения случайной компоненты нормальному закону распределения;
- – равенством математического ожидания случайной компоненты нулю;
- – независимостью значений уровней случайной последовательности, т.е. отсутствием существенной автокорреляции.

Проверка адекватности трендовых моделей основана на проверке выполняемости у остаточной последовательности указанных четырех свойств. Если не выполняется хотя бы одно из них, модель признается неадекватной; при выполнении всех четырех свойств модель адекватна. Данная проверка осуществляется с использованием ряда статистических критериев и рассмотрена более подробно ниже. Отметим, что в дальнейшем мы не будем рассматривать циклическую компоненту временных рядов; укажем только, что для моделирования и прогнозирования сезонных и циклических экономических процессов используются специальные методы (индексный и спектральный анализы, выравнивание по ряду Фурье и др.).

Системы эконометрических уравнений

Пример модели авторегрессии. В качестве первоначального примера рассмотрим эконометрическую модель временного ряда, описывающего рост индекса потребительских цен (индекса инфляции). Пусть $I(t)$ - рост цен в месяц t (подробнее об этой проблематике см. главу 7). Тогда по мнению некоторых экономистов естественно предположить, что

$$I(t) = cI(t-1) + a + bS(t-4) + e, \quad (1)$$

где $I(t-1)$ - рост цен в предыдущий месяц (c - некоторый коэффициент затухания, предполагающий, что при отсутствии внешних воздействий рост цен прекратится), a - константа (она соответствует линейному изменению величины $I(t)$ со временем), $bS(t-4)$ - слагаемое, соответствующее влиянию эмиссии денег (т.е. увеличения объема денег в экономике страны, осуществленному Центральным Банком) в размере $S(t-4)$ и пропорциональное эмиссии с коэффициентом b , причем это влияние проявляется не сразу, а через 4 месяца; наконец, e - это неизбежная погрешность.

Модель (1), несмотря на свою простоту, демонстрирует многие характерные черты гораздо более сложных эконометрических моделей. Во-первых, обратим внимание на то, что некоторые переменные определяются (рассчитываются) внутри модели, как $I(t)$. Их называют *эндогенными* (*внутренними*). Другие задаются извне (это *экзогенные* переменные). Иногда, как в теории управления, среди экзогенных переменных, выделяют *управляемые* переменные - те, с помощью которых менеджер может привести систему в нужное ему состояние.

Во-вторых, в соотношении (1) появляются переменные новых типов - с лагами, т.е. аргументы в переменных относятся не к текущему моменту времени, а к некоторым прошлым моментам.

В-третьих, составление эконометрической модели типа (1) - это отнюдь не рутинная операция. Например, запаздывание именно на 4 месяца в связанном с эмиссией денег слагаемом $bS(t-4)$ - это результат достаточно изощренной предварительной статистической обработки. Далее, требует изучения вопрос зависимости или независимости величин $S(t-4)$ и $I(t)$. От решения этого вопроса зависит, как выше уже отмечалось, конкретная реализация процедуры метода наименьших квадратов.

С другой стороны, в модели (1) всего 3 неизвестных параметра, и постановку метода наименьших квадратов выписать нетрудно:

$$f(a, b, c) = \sum_{t \in K} (I(t) - cI(t-1) - a - bS(t-4))^2.$$

Проблема идентифицируемости. Представим теперь модель тапа (1) с большим числом эндогенных и экзогенных переменных, с лагами и сложной внутренней структурой. Вообще говоря, ниоткуда не следует, что существует хотя бы одно решение у такой системы. Поэтому возникает не одна, а две проблемы. Есть ли хоть одно решение (проблема идентифицируемости)? Если да, то как найти наилучшее решение из возможных? (Это - проблема статистической оценки параметров.)

И первая, и вторая задача достаточно сложны. Для решения обеих задач разработано множество методов, обычно достаточно сложных (см. список литературы), лишь часть из которых имеет научное обоснование. В частности, достаточно часто пользуются статистическими оценками, не являющимися состоятельными (строго говоря, их даже нельзя назвать оценками).

Коротко опишем некоторые распространенные приемы при работе с системами линейных эконометрических уравнений.

Система линейных одновременных эконометрических уравнений. Чисто формально можно все переменные выразить через переменные, зависящие только от текущего момента времени. Например, в случае уравнения (1) достаточно положить

$$H(t) = I(t-1), G(t) = S(t-4).$$

Тогда уравнение примет вид

$$I(t) = cH(t) + a + bG(t) + e. \quad (2)$$

Отметим здесь же возможность использования регрессионных моделей с переменной структурой путем введения фиктивных переменных. Эти переменные при одних значениях времени (скажем, начальных) принимают заметные значения, а при других - сходят на нет (становятся фактически равными 0). В результате формально (математически) одна и та же модель описывает совсем разные зависимости.

Косвенный, двухшаговый и трехшаговый методы наименьших квадратов. Как уже отмечалось, разработана масса методов эвристического анализа систем эконометрических уравнений. Они предназначены для решения тех или иных проблем, возникающих при попытках найти численные решения систем уравнений.

Одна из проблем связана с наличием априорных ограничений на оцениваемые параметры. Например, доход домохозяйства может быть потрачен либо на потребление, либо на сбережение. Значит, сумма долей этих двух видов трат априори равна 1. А в системе эконометрических уравнений эти доли могут участвовать независимо. Возникает мысль оценить их методом наименьших квадратов, не обращая внимания на априорное ограничение, а потом подкорректировать. Такой подход называют косвенным методом наименьших квадратов.

Двухшаговый метод наименьших квадратов состоит в том, что оценивают параметры отдельного уравнения системы, а не рассматривают систему в целом. В то же время трехшаговый метод наименьших квадратов применяется для оценки параметров системы одновременных уравнений в целом. Сначала к каждому уравнению применяется двухшаговый метод с целью оценить коэффициенты и погрешности каждого уравнения, а затем построить оценку для ковариационной матрицы погрешностей. После этого для оценивания коэффициентов всей системы применяется обобщенный метод наименьших квадратов (см. выше).

Менеджеру и экономисту не следует становиться специалистом по составлению и решению систем эконометрических уравнений, даже с помощью тех или иных программных систем, но он должен быть осведомлен о возможностях этого направления эконометрики, чтобы в случае производственной необходимости квалифицированно сформулировать задание для специалистов-эконометриков.

Нелинейные модели регрессии и линеаризация. Нелинейные зависимости, поддающиеся непосредственной линеаризации.

Многие важные связи в экономике являются **нелинейными**, например, ПФ (зависимости между объемом производства, трудом и капиталом и т.д.), функция спроса (зависимости между спросом на какой – либо товар или услуги, доходом населения и ценами на этот товар). Если в результате анализа пришли к выводу, что в регрессионной модели функция $f(\bar{X}, \bar{A})$ *нелинейная*, то обычно поступают так:

- подбирают такие *преобразования* анализируемых переменных $Y, x_1, x_2, \dots, x_n$, которые позволили бы представить искомую зависимость в виде **линейного** соотношения между **новыми переменными**:

$$\tilde{Y} = \phi_0(Y), \tilde{x}_1 = \phi_1(x_1), \dots, \tilde{x}_n = \phi_n(x_n) - \text{преобразования,}$$

$$\tilde{Y} = a_0 + a_1\tilde{x}_1 + a_2\tilde{x}_2 + \dots + a_n\tilde{x}_n + e_i, \text{ где } i = 1, \dots, k$$

– это процедура **линеаризации модели**.

- при невозможности линеаризации модели исследуют регрессионную зависимость (нелинейную). Это значительно сложнее.

Различают два класса нелинейных **регрессий**:

- регрессии, нелинейные *относительно* включенных в анализ *объясняющих переменных* (факторов), но *линейные по оцениваемым параметрам*;

- регрессии, *нелинейные по оцениваемым параметрам*.

К **первому классу** относятся следующие функции:

- полиномы разных степеней – $y = a + bx + cx^2 + \varepsilon$,
 $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon$, и т.д.

- гипербола – $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$.

Ко **второму классу** относятся функции:

- степенная – $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$;
- показательная – $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$;
- экспоненциальная – $y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$.

Нелинейная регрессия по включенным переменным представляет сложности в оценке параметров. Она определяется методом наименьших квадратов, ибо эти функции линейны по параметрам.

Пример 1

В уравнении полинома второй степени $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \varepsilon$, сделаем замену $x = x_1$, $x^2 = x_2$, тогда имеем $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \varepsilon$ – уравнение линейной регрессии.

В уравнении полинома $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p + \varepsilon$,

сделаем замену $x = x_1$, $x^2 = x_2, \dots, x^p = x_p$,

получим уравнение вида $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p + \varepsilon$.

Значит, *полином* любого порядка сводится к *линейной регрессии* с ее методами оценивания параметров и *проверки гипотез*. На практике чаще используется *парабола*, то есть полином второй степени. В этом случае определяется x , при котором достигается максимальное (или минимальное) значение результативного признака. Для этого применяют необходимое условие экстремума функции $\hat{y}_x = a + bx + cx^2$, то есть находят производную и приравнивают ее к нулю $\hat{y}'_x = b + 2cx = 0$, откуда $x_0 = -\frac{b}{2c}$. Эту зависимость целесообразно применять, если в определенном интервале значений фактора меняется характер связи рассматриваемых признаков: прямая связь меняется на обратную или наоборот.

Применение МНК для оценки параметров параболы второй степени приводит к следующей системе нормальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k y_i &= k \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^k x_i + c \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2, \\ \sum_{i=1}^k y_i \cdot x_i &= a \cdot \sum_{i=1}^k x_i + b \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^k x_i^3, \\ \sum_{i=1}^k y_i \cdot x_i^2 &= a \cdot \sum_{i=1}^k x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^k x_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^k x_i^4. \end{aligned}$$

Решение ее возможно по правилу Крамера или Гаусса.

Такого рода функцию можно наблюдать в экономике *труда* при изучении зависимости *заработной платы от возраста*. С определенного возраста заработная плата может убывать ввиду старения организма, снижения производительности труда.

Такой же характер носит кривая Лаффера (зависимость поступления в бюджет от налоговой ставки).

Такая зависимость может быть использована для характеристики зависимости урожайности от количества внесенных удобрений. С увеличением количества удобрений урожайность растет лишь до достижения оптимальной дозы вносимых удобрений. Дальнейший рост удобрений оказывается вредным для растения и урожайность снижается.

Чаще исследователь имеет дело лишь с отдельными сегментами параболы.

Следует отметить также, что параметры параболы не всегда могут быть логически истолкованы.

Пример 2

Рассмотрим пример гиперболической зависимости $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$. Она может быть использована для характеристики связи между удельными расходами сырья, материалов, топлива и объемов выпускаемой продукции, временем обращения товаров и товарооборотом (на микроуровне), а также макроуровне. Например, зависимость себестоимости (результатирующий признак) от объемов выпускаемой продукции (фактор x).

Классическим примером гиперболической зависимости является кривая Филлипса, характеризующая нелинейное соотношение между нормой безработицы (фактор x) и процентом прироста заработной платы (результатирующий признак y).

Заменив $z = \frac{1}{x}$, получим линейное уравнение регрессии $y = a + bz + \varepsilon$, оценки параметров которого могут быть найдены МНК. Система нормальных уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k y_i = k \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i}, \\ \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{x_i} = a \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i} + b \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i^2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k y_i = k \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^k z_i, \\ \sum_{i=1}^k y_i \cdot z_i = a \cdot \sum_{i=1}^k z_i + b \cdot \sum_{i=1}^k z_i^2. \end{cases}$$

или после замены

Если получить здесь матрицу X , то она будет иметь следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x_1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{x_k} \end{pmatrix}_{k \times 2} \text{ (матрица имеет } k \text{ строк и 2 столбца).}$$

Так, для кривой Филипса $\hat{y} = 0,00679 + 0,1842 \frac{1}{x}$ (здесь $a=0,00679$ и $b=0,1842$) величина a означает, что с ростом уровня безработицы *темпы прироста заработной платы* стремятся к нулю. Соответственно можно определить тот уровень безработицы, при котором заработная плата оказывается стабильной и темп ее прироста равен нулю.

При $b < 0$, имеем медленноповышающуюся функцию с верхней асимптотой $y = a$ при $x \rightarrow \infty$.

Примером может служить взаимосвязь доли расходов y на товары длительного пользования и общих сумм расходов (или доходов) x . Немецкий статистик Энгель на основании исследования семейных расходов сформулировал закономерность – с ростом дохода доля расходов, расходуемых на продовольствие, уменьшается. Соответственно с увеличением доходов доля дохода, расходуемая на непродовольственные товары, будет

возрастать. Имеем гиперболическую зависимость вида $y = a - \frac{b}{x} + \varepsilon$. При $y = 0$, получаем $a = \frac{b}{x}$, откуда $x = \frac{b}{a}$.

Вместе с тем равносторонняя гипербола не является единственно возможной функцией для описания кривой Энгеля. Уоркинг и С.Лизер для этих целей использовали **полулогарифмическую** зависимость

$$y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon.$$

Заменив $z = \ln x$, опять получим линейное уравнение $\hat{y} = a + b \cdot z$. Оценка параметров a и b может быть найдена МНК. Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k y_i = k \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^k \ln x_i, \\ \sum_{i=1}^k y_i \cdot \ln x_i = a \cdot \sum_{i=1}^k \ln x_i + b \cdot \sum_{i=1}^k (\ln x_i)^2. \end{cases}$$

Возможны и иные нелинейные модели. Однако если нет каких-либо теоретических обоснований в использовании какого-либо вида кривых, то нужно использовать такие, чтобы для преобразованных переменных получить более простую модель регрессии.

До сих пор преобразования затрагивали только факторы. Рассмотрим случай, когда преобразовывается не только фактор, но и результирующий признак.

Если имеется зависимость вида $y = \frac{1}{a + bx + \varepsilon}$, то есть $\frac{1}{y} = a + bx + \varepsilon$, то она приводится к линейной регрессии преобразованием $\tilde{y} = \frac{1}{y}$, получаем $\tilde{y} = a + bx + \varepsilon$. При вычислении МНК оценок в качестве вектора наблюдаемых значений надо использовать

вектор $\tilde{y} = \left[\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{1}{y_k} \right]$. Эта **зависимость** полезна при изучении **спроса на товар** y в зависимости от его **цены** x .

При зависимости $y = \frac{x}{a + bx + \varepsilon}$ линейризация достигается преобразованием: $\tilde{y} = \frac{1}{y}$, $\tilde{x} = \frac{1}{x}$, тогда $\tilde{y} = a\tilde{x} + b + \varepsilon$.

Экспоненциальная (показательная) зависимость.

Широкий класс экономических показателей характеризуется приблизительно **постоянным темпом** относительно прироста во времени. Этому соответствует зависимость вида: $y = a \cdot e^{bx+\varepsilon}$.

Относительный прирост y за единицу времени x :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot a \cdot e^{bx+\varepsilon} = b$$

Линеаризация достигается здесь переходом к переменным $\tilde{y} = \ln y$, тогда $\tilde{y} = \tilde{a} + bx + \varepsilon$, где $\tilde{a} = \ln a$.

Имея наблюдения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ и формируя столбец $\tilde{y} = (\ln y_1, \ln y_2, \dots, \ln y_k)^T$, с помощью МНК получают оценки $\tilde{a}, b$, а затем $a = e^{\tilde{a}}$.

Приводима к линейному виду и **логистическая функция**

$$y = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx+\varepsilon}}$$

Ее можно записать в виде: $b \cdot e^{-cx+\varepsilon} = \frac{a}{y} - 1$. Тогда логарифмируя данное выражение

$\ln b - cx + \varepsilon = \ln \left[\frac{a}{y} - 1 \right]$ и полагая $z = \ln \left[\frac{a}{y} - 1 \right]$ и $B = \ln b$, получим линейную зависимость $z = B - cx + \varepsilon$.

Логистическая кривая используется для описания поведения показателей, имеющих определенные «уровни насыщения».